Correction DS n°4

Exercice I - Espaces Vectoriels

1. Le programme suivant permet de vérifier si un vecteur X appartient à F. Le résultat donné sera 1 si le vecteur appartient bien à F et 0 sinon.

2. On considère $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | -x+y+2z=0 \text{ et } y-3z=0 \right\}$

   (a) On vérifie que
   - $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - $-0+0+2\times 0 = 0$ et $0-3\times 0 = 0$. Donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $-x_1+x_2+2x_3 = 0$, $x_2-3x_3=0$ et $-y_1+y_2+2y_3=0$, $y_2-3y_3=0$. On étudie
   $$\lambda X + Y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$
   On a alors
   $$\begin{aligned} -(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) + 2(\lambda x_3 + y_3) &= -\lambda x_1 - y_1 + \lambda x_2 + y_2 + \lambda 2x_3 + 2y_3 \\ &= \lambda(-x_1+x_2+2x_3) + (-y_1+y_2+2y_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   ainsi que
   $$\begin{aligned} (\lambda x_2 + y_2) - 3(\lambda x_3 + y_3) &= \lambda x_2 + y_2 - 3\lambda x_3 - 3y_3 \\ &= \lambda(x_2-3x_3) + (y_2-3y_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   On a montré que $\lambda X + Y \in F$ et donc
   $$\boxed{F \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

   (b) On a
   $$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \middle| -x+y+2z=0 \text{ et } y=3z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \middle| x=5z \text{ et } y=3z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 5z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

C'est-à-dire que

$$\boxed{F = Vect\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

3. Dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$ on considère les vecteurs : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) On montre que (u, v, w) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ 3\lambda_2 & = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\boxed{\text{La famille } (u, v, w) \text{ est une famille libre de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

   (b) On cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 4 \\ \lambda_3 & = -1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = 2 \\ \lambda_3 & = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 5 \\ 3\lambda_2 & = -3 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_3 & = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 & = 4 \\ \lambda_2 & = -1 \\ \lambda_3 & = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Donc } \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4u - v - w}$$

Exercice II - ECRICOME 2014

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. On a pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x > 0$ et $\ln(1+x) > 0$ donc le quotient est positif et

$$\boxed{\forall x \in [0;+\infty[, \quad f(x) \geq 0.}$$

Donc par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(u_{n-1}) \geq 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ u_n \text{ existe.}}$$

2. On écrit un programme Scilab permettant de calculer u_N.

```
u = %e
n = input("Donnez un entier n")

for k=1:n
    if u == 0 then
        u = 1
    else
        u = u /log(1+u)
    end
end
disp(u)
```

3. La fonction $x \to \ln(1+x)$ est continue sur $]0;+\infty[$ car $1+x > 0$

La fonction $x \to x$ est continue sur $]0;+\infty[$

La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ est continue en tant que quotient de fonctions continues.

On étudie la continuité en 0. On calcule

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\dfrac{\ln(1+x)}{x}} = 1$$

(On reconnait un taux d'accroissement). Ainsi la fonction est continue en 0.

$$\boxed{\text{Montrer que } f \text{ est continue sur } [0;+\infty[.}$$

4. La fonction $x \to \ln(1+x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ car $1+x > 0$

La fonction $x \to x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0;+\infty[\text{ en tant que quotient de fonctions } \mathcal{C}^1.}$$

5. Soit $x \geq e-1$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) \leq x &\iff \frac{x}{\ln(1+x)} - x \leq 0 \\ &\iff \frac{x - x\ln(1+x)}{\ln(1+x)} \leq 0 \\ &\iff \frac{x(1-\ln(1+x))}{\ln(1+x)} \leq 0 \end{aligned}$$

Or $\ln(1+x) \geq 1$ donc $1-\ln(1+x) \leq 0$, $x > 0$ et $\ln(1+x) > 0$.

$$\boxed{\text{Donc } f(x) \leq x.}$$

De la même façon,

$$(x+1)\ln(x+1) \geq (x+1) \iff (x+1)\left(\ln(x+1)-1\right) \geq 0$$

Or $\ln(x+1)-1 \geq 0$ et $x+1 \geq 0$ ainsi

$$\boxed{(x+1)\ln(x+1) \geq (x+1)}$$

La fonction f est dérivable sur $[e+1;+\infty[$. (montré à la question 4) et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}}{(\ln(x+1))^2} \\ &= \frac{\ln(1+x)(1+x) - x}{(1+x)(\ln(x+1))^2} \end{aligned}$$

Or d'après le résultat précédent, $\ln(1+x)(1+x) - x \geq 1$. Donc

$$\boxed{\forall x \geqslant e-1, \quad f'(x) \geqslant 0.}$$

6. Nous montrons par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{\forall n \in \mathbb{N}, \quad e-1 \leqslant u_n\}$
   - **Initialisation :** On a $u_0 = e \geq e-1$. Donc la proposition $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. De plus, rappelons que la fonction f est croissante sur $[e-1;+\infty[$. Ainsi

   $$\begin{aligned} e-1 \leq u_n &\iff f(e-1) \leq f(u_n) \\ &\iff e-1 \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

   La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie
   - **Conclusion :** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e-1}$

7. On s'intéresse à la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Comme $u_n \neq 0$, on calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\ln(1+u_n)}$$

Or $u_n \geq e-1 \implies \ln(1+u_n) \geq 1$ ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Elle est également minorée par $e-1$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc convergente.}}$$

Notons, ℓ la limite de la suite (u_n). On a nécessairement

$$\begin{aligned}\ell = f(\ell) &\Longleftrightarrow \ell = \frac{\ell}{\ln(1+\ell)}\\ &\Longleftrightarrow \frac{\ln(1+\ell)\ell - \ell}{\ln(1+\ell)} = 0\\ &\Longleftrightarrow \frac{\ell(\ln(1+\ell)-1)}{\ln(1+\ell)} = 0\end{aligned}$$

Ainsi, deux solutions sont possibles, $\ell = 0$ ou $\ln(1+\ell) - 1 = 0 \Longleftrightarrow \ell = e-1$. Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e-1$, donc

$$\boxed{\text{La limite de la suite } (u_n) \text{ est } e-1.}$$

Exercice III - ECRICOME 2005

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$$

1. La fonction $\varphi_0 : x \to e^{-2x}$ est une fonction continue sur $[0;1]$ en tant que composée de fonction continue. L'intégrale I_0 existe et

$$\begin{aligned}I_0 &= \int_0^1 e^{-2x}dx\\ &= \left[\frac{-1}{2}e^{-2x}\right]_0^1\\ &= \frac{-1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } I_0 = \frac{1-e^{-2}}{2}.}$$

La fonction $\varphi_1 : x \to (1-x)e^{-2x}$ est une fonction continue sur $[0;1]$ en tant que composée et produite de fonctions continues. L'intégrale I_1 existe et

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-2x}$$

On pose les fonctions

$$\begin{aligned}u(x) &= 1-x \qquad v'(x) = e^{-2x}\\ u'(x) &= -1 \qquad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}\end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. A l'aide d'une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[-\frac{(1-x)}{2}e^{-2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{-e^{-2}}{2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient } I_1 = \frac{1+e^{-2}}{4}.}$$

2. Pour $x \in [0,1]$, on a $1-x \in [0,1]$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& (1-x)^n \geq (1-x)^{n+1} \\
\Longrightarrow\quad & (1-x)^n e^{-2x} \geq (1-x)^{n+1}e^{-2x} \\
\Longrightarrow\quad & \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \geq \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-2x}dx \\
\Longrightarrow\quad & I_n \geq I_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

3. Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout entier n,

$$\begin{aligned}
(1-x)^n \geq 0 &\Longrightarrow (1-x)^n e^{-2x} \geq 0 \\
&\Longrightarrow \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \geq 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0.}$$

4. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.

$$\boxed{\text{Donc la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

5. On a

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ e^{-2x} \leq 1.}$$

6. D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
& (1-x)^n e^{-2x} \leq (1-x)^n \\
\Longrightarrow\quad & \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \leq \int_0^1 (1-x)^n dx \\
\Longrightarrow\quad & I_n \leq \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 \\
\Longrightarrow\quad & I_n \leq 0 - \frac{-1}{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

7. Comme $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$$

8. La fonction φ_{n+1} est continue sur $[0,1]$ en tant que composée et produit de fonctions continues. L'intégrale existe et

$$2I_{n+1} = 2\int_0^1 (1-x)^{n+1} \times 2e^{-2x} dx$$

On définit

$$\begin{array}{ll} u(x) = (1-x)^{n+1} & v'(x) = 2e^{-2x} \\ u'(x) = -(n+1)(1-x)^n & v(x) = -e^{-2x} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. A l'aide d'une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} 2I_{n+1} &= \left[-(1-x)^{n+1}e^{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)(1-x)^n e^{-2x} dx \\ &= 0 - (1)^{n+1}e^0 - (n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n}$$

9. D'après l'égalité précédente, on a

$$2I_{n+1} = 1 - nI_n - I_n \iff nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$$

Or $\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} nI_n = 1.}$$

10. Toujours en utilisant l'égalité précédente, on a

$$\begin{aligned} & nI_n - 1 = -I_n - 2I_{n+1} \\ \iff \quad & n\left(nI_n - 1\right) = -nI_n - 2nI_{n+1} \\ \iff \quad & n\left(nI_n - 1\right) = -nI_n - 2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1} \end{aligned}$$

Or d'après les questions précédentes, $\lim_{n \to +\infty} I_{n+1} = 0$, $\lim_{n \to +\infty} nI_n = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} (n+1)I_{n+1} = 1$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} n\left(nI_n - 1\right) = -3.}$$

11. En reprenant la relation

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(n\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon\left(n\right) = 0$$

On remarque que $\lim_{n \to +\infty} I_n = a = 0$ et donc

$$\boxed{a = 0.}$$

En multipliant l'expression par n et en remplaçant a par 0, on obtient

$$nI_n = b + \frac{c}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$$

On remarque alors que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = b = 1$ et donc

$$\boxed{b = 1.}$$

Enfin, en soustrayant 1 et en multipliant par n dans la relation pour I_n, on a

$$n(I_n - 1) = c + \varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$$

On remarque alors que $\lim_{n\to+\infty} n(I_n - 1) = c = -3$ et donc

$$\boxed{c = -3.}$$

En conclusion,

$$\boxed{I_n = \tfrac{1}{n} - \tfrac{3}{n^2} + \tfrac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0}$$

Exercice IV - ECRICOME 2018.

Partie I : Étude de suite

1. (a) La limite en 0 ne pose aucun problème, c'est celle de ln, on a donc

$$\boxed{\lim_{x\to0} f(x) = -\infty.}$$

En $+\infty$, on a une forme indéterminée ; mais on met tout sous un même logarithme et on sait que $x/(x+1)$ tend vers 1 donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{x+1} + \ln\left(\tfrac{x}{x+1}\right) = 0.}$$

(b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable comme somme et composée de fonctions usuelles dérivables. On a d'ailleurs

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

On en déduit le tableau de variations de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

(c) Par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } u_{n+1}-u_n=f(n).}$$

(d) D'après le tableau de variations de f, on voit que $f(x)<0$ pour tout $x>0$. En particulier, $f(n)<0$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1}-u_n=f(n)<0$ et

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est (strictement) décroissante.}}$$

(e) C'est un petit programme sans réelle difficulté que l'on peut faire avec une boucle `for` ou avec une opération pointée. On propose les deux versions.

```
function y=u(n)
    y=0;
    for k=1:n
        y=y+1/k;
    end
    y=y-log(n)
endfunction
```

ou bien

```
function y=u(n)
    y=sum([1:n].^(-1))-log(n)
endfunction
```

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= u_{n+1}-\frac{1}{n+1}-u_n+\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\ln(n)-\ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{v_{n+1}-v_n=\tfrac{1}{n}-\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right).}$$

(b) On pose la fonction $g(x)=\ln(1+x)-x$. Cette fonction est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ g'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}<0$$

La fonction g est donc strictement décroissante et $g(0)=0$ donc la fonction g est négative ou nulle. En conséquent

$$\boxed{\forall x\geq 0,\ \ln(1+x)\leq x.}$$

En appliquant cette inégalité à $x = 1/n$, on voit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$ ou encore que

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est croissante.}}$$

(c) On pose la fonction $h(x) = \ln(1+x) - x - \dfrac{x^2}{2}$. La fonction h est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} - x = \frac{1+x-1-x-x^2}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} < 0$$

La fonction h est donc strictement décroissante et $h(0) = 0$. La fonction h est donc strictement négative. On en conclut que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}.}$$

(d) En remplaçant dans la dernière inégalité x par $\dfrac{1}{n}$, on a directement

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

La série de terme général $1/2n^2$ est convergente comme multiple d'une série de Riemann convergente. Par comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série de terme générale } v_{n+1} - v_n \text{ est donc convergente.}}$$

On note alors γ la valeur de sa somme

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n).$$

(e) Le calcul de la somme partielle de la série susnommée fait apparaitre une somme télescopique ;

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1$$

Or $v_1 = u_1 - 1$ et $u_1 = 1$ donc $v_1 = 0$ et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n.}$$

Ainsi, (v_n) est convergente et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{n+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \gamma.}$$

3. (a) Cette question n'étant pas vraiment formulée ; on interprète l'énoncé comme une demande de justification de la convergence de (u_n) et le calcul de sa limite. On voit que

$$v_n = u_n - \frac{1}{n} \Longleftrightarrow u_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Comme (v_n) converge et que $1/n \to 0$, on en déduit que

$$\boxed{(u_n) \text{ converge et a la même limite que } (v_n)\text{, c'est à dire } \gamma.}$$

(b) (v_n) étant croissante et convergente vers γ, (u_n) étant décroissante et convergente vers γ, on a bien l'encadrement demandé

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \gamma \leq u_n.}$$

Ceci permet de voir que

$$0 \leq u_n - \gamma = v_n - \gamma + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

ce qui donne bien

$$\boxed{|u_n - \gamma| \leq \tfrac{1}{n}.}$$

(c) Le programme proposé permet de calculer une approximation de γ à la précision `eps` près (rentrée par l'utilisateur). En effet, une telle approximation sera réalisée par un terme u_n tel que $|u_n - \gamma| < \texttt{eps}$, ce qui, d'après la question précédente a lieu dès que $1/n < \texttt{eps}$. Il suffit de prendre le premier entier n tel que $n > 1/\texttt{eps}$, donné par $\lfloor \texttt{1/eps} \rfloor + 1$.

Partie II : Étude d'une série

1. (a) On a pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned} 2n - 1 \geq n &\Longleftrightarrow \frac{1}{2n-1} \leq \frac{1}{n} \\ &\longleftrightarrow \frac{1}{n(2n-1)} \leq \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Donc, on a bien

$$\boxed{a_n \leq \frac{1}{n^2}.}$$

(b) La série de terme général $\dfrac{1}{2n^2}$ est un multiple d'une série de Riemann convergente. Par comparaison de deux séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{la série de terme général } a_n \text{ converge.}}$$

2. (a) Observons que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et

$$\boxed{\text{on reconnait une décomposition des indices de sommation selon leur parité.}}$$

(b) Il suffit de mettre au même dénominateur et de procéder par identification

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha(2n-1) + \beta n}{n(2n-1)} \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha + \beta & = & 0 \\ -\alpha & = & 1 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & -1 \\ \beta & = & 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } a_n = \frac{-1}{n} + \frac{2}{2n-1}.}$$

(c) On utilise les résultats des deux dernières questions

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \qquad \text{(d'après 2b.)} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \qquad \text{(d'après 2a.)} \\
&= 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.}$$

3. (a) On revient à la définition de u_n

$$\begin{aligned}
u_{2n} - u_n + \ln(2) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) + \ln(2) \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) - \ln(n) + \ln(n) + \ln(2)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{u_{2n} - u_n + \ln(2) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.}$$

(b) D'après 2c. et 3a., on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} a_k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= 2 \times \lim_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_n + \ln(2))
\end{aligned}$$

or, comme (u_n) converge, u_{2n} et u_n ont même limite et leur différence tend vers 0. Donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2).}$$

4. (a) On voit que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.
\end{aligned}$$

(b) On reconnait une série de Riemann, on a alors que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=\ln(2),$$

et on retrouve bien la valeur précédente

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}a_k&=2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\\&=2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve le résultat de la question précédente, à savoir,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}a_k=2\ln(2).}$$